CUADERNILLO DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICA PARA OCTAVO BÁSICO 2020
PARTE 1

NOMBRE: ______________________

Introducción:

Una de las formas más fáciles para estudiar matemática es repasar y aplicar los conceptos analizados en clases a través de ejercicios y problemas; este cuadernillo pretende ser una ayuda que debes usar en tu casa con el fin de facilitar tu aprendizaje.

Esta guía de ejercicios tiene el fin de apoyar los estudios de los niños y niñas en este tiempo de crisis. Y a la vez ser una vía de escape a las preocupaciones del diario vivir.

Departamento de Matemática

¿CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS?

El conjunto de los números enteros surge como una necesidad de llenar algunos vacíos que existían al trabajar con los naturales: resolver sustracciones donde el minuendo es menor que el sustraendo, expresar la pérdida de dinero en un negocio, señalar temperaturas bajo cero, indicar las profundidades bajo el nivel del mar, entre otros.

El hombre visto en la imposibilidad de realizar algunas restas, crea el conjunto de los números negativos, los que en su principio se conocían como <<números deudos>> o <<¡números imposibles!>>. Por otro lado, el número 0 apareció en Mesopotamia hacia el siglo III AC, ubicándolo como un dígito sin contenido, una referencia para diferenciar las cantidades positivas (a la derecha del cero) de las negativas (a la izquierda del cero).

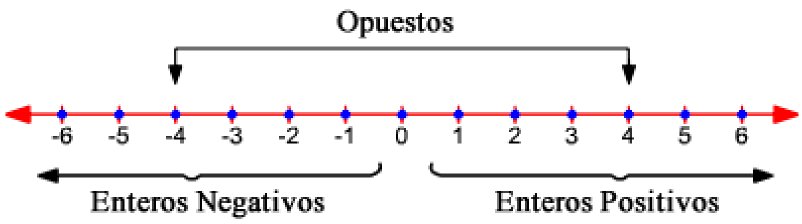
Es así que el conjunto de los números enteros por extensión puede escribirse como:

$$\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

El conjunto de los números enteros se denota por la letra $\mathbb{Z}$, el cual se conforma de la unión de tres subconjuntos $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$. Además debemos tener presente que $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.

<u>REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS EN LA RECTA NUMÉRICA.</u>

Los números negativos se consideran como los opuestos de sus simétricos positivos y viceversa. Es así que:



<u>ORDEN DE LOS NÚMEROS ENTEROS.</u>

Para ordenar los números enteros se pueden considerar las siguientes aseveraciones:

- Todo número entero a la derecha del cero en la recta numérica, es positivo.
- Todo número entero a la izquierda del cero en la recta numérica, es negativo.
- Todo número entero que esté a la derecha de otro en la recta numérica, es mayor que él.
- Todo número entero que esté a la izquierda de otro en la recta numérica, es menor que él.
- Todo número negativo es menor que cero.
- Todo número positivo es mayor que cero.
- Todo número negativo es menor que cualquier número positivo.

ACTIVIDAD 1.
Escribe en el recuadro vacío la respuesta a cada ejercicio utilizando el símbolo < o > en cada caso.

a) Ordena en forma creciente los siguientes números.

$6 \;;\; -2 \;;\; -10 \;;\; -9 \;;\; 5 \;;\; 0 \;;\; -1 \;;\; 1$

b) Ordena en forma creciente los siguientes números.

$-63 \;;\; 0 \;;\; 78 \;;\; -123 \;;\; -29 \;;\; 1 \;;\; -1 \;;\; -12 \;;\; 65 \;;\; -93 \;;\; 17$

c) Ordena en forma decreciente los siguientes números.

$-978 \;;\; -798 \;;\; -576 \;;\; -788 \;;\; -654 \;;\; 0$

d) Ordena en forma creciente los siguientes números.

$546 \;;\; -756 \;;\; -3.745 \;;\; -36.574 \;;\; 564 \;;\; 3.754 \;;\; -765 \;;\; -36.457 \;;\; -3.457 \;;\; 0$

e) Si $\in \mathbb{Z}$, ordena de menor a mayor las siguientes expresiones.

$-9 \;;\; \;;\; -7 \;;\; +5 \;;\; -17 \;;\; +30 \;;\; -1$

VALOR ABSOLUTO.

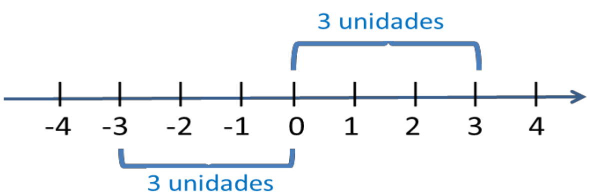
El valor absoluto de un número entero se define como la distancia en unidades de dicho número con respeto al cero.

$$| \quad | = \begin{cases} \_ \quad , & si \quad \in \mathbb{Z} \\ \quad , & si \quad \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|7| = 7$$
$$|-7| = -(-7) = 7$$

Como se observa en el ejemplo, el valor absoluto corresponde a una distancia, por lo tanto **siempre será positivo**.



ACTIVIDAD 2.
Completa las siguientes oraciones sobre los números enteros.

a) El conjunto de los números enteros se simboliza con la letra ______________.

b) Los números negativos se encuentran a la ____________________ del cero.

c) Los números positivos se encuentran a la ____________________ del cero.

d) El número 2.345 es ____________________ que el número –5.489.

e) El número 0 es ___________________ que el número –267.

f) $|-24|$ es _______________________ $|24|$.

g) $|-15|$ es ______________________ 0.

h) El antecesor de –9 es _____________________ el sucesor de –11.

i) El antecesor de –15 es _____________________ el sucesor de –14.

j) $|-15|$ es ______________________ $|-20|$.

k) El conjunto de los enteros se forma por tres subconjuntos: _________________________________.

l) El conjunto $\mathbb{N} =$ _____________.

m) El valor absoluto de un número es la _________________ entre dicho número y el cero. Por lo tanto, el valor absoluto de cualquier entero es siempre ____________________.

OPERACIONES EN LOS NÚMEROS ENTEROS.

El conjunto de los números enteros se define bajo dos operaciones, las que definen la estructura de un Anillo conmutativo.
Es decir $(\mathbb{Z}, +, \times)$ es un Anillo conmutativo:

$(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.

$(\mathbb{Z}, \times)$ cumple con la clausura, asociatividad,elemento neutro y conmutatividad.

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ cumple la distributividad de $\times$ sobre $+$.

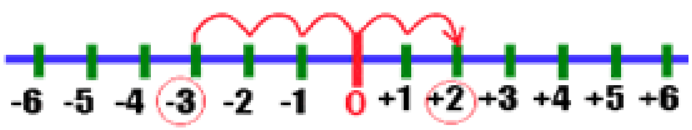
1. ***Adición:*** La adición de números enteros define cuatro casos posibles:

$$\mathbb{Z}^+ + \mathbb{Z}^+ \; \mathbb{Z}^+ +$$
$$\mathbb{Z}^- \;\; \mathbb{Z}^- \;\; + \;\; \mathbb{Z}^+$$
$$\mathbb{Z}^- + \mathbb{Z}^-$$

Para sumar dos números enteros se puede realizar por dos métodos:

a) ***Utilizando una recta numérica:*** tomando como referencia el cero, sabiendo que las cifras positivas representan unidades a la derecha y las negativas a la izquierda, moverse tantos espacios a la derecha o izquierda como indiquen los sumandos de la suma.
Ejemplos:

$$(-3) + 5 = +2$$



b) ***Utilizando el concepto de valor absoluto:***
- Para sumar dos enteros con el mismo signo, hay que hallar la suma de sus valores absolutos, acompañando la suma con el signo de los sumandos.
  Ejemplo:

$$5 + 3 = +(|5| + |3|) = +8$$
$$(-5) + (-3) = -(|-5| + |-3|) = -8$$

- Para sumar dos enteros con diferente signo, hay que hallar la diferencia de los valores absolutos (Mayor valor absoluto – Menor valor absoluto), acompañando el resultado con el signo del entero que tiene mayor valor absoluto.
  Ejemplo:

$$(-5) + 3 = -(|-5| - |3|) = -2$$
$$5 + (-3) = +(|5| + |-3|) = +2$$

Propiedades de la Adición de enteros.

Los enteros con la adición definen las propiedades de:

a) Clausura: La suma de dos enteros siempre es un entero.
Ejemplo:

$$(-5) \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; (-5) + 2 = -3 \; \in \mathbb{Z}$$

b) Asociatividad: Si sumamos más de dos enteros, el orden de agrupar los sumandos no altera la suma.
Ejemplo:

$$(-5) \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{Z}, (-3) \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; ((-5) + 2) + (-3) = (-5) + (2 + (-3))$$

c) Elemento Neutro Aditivo: para todo número entero, existe un único entero que sumado con cualquiera de los números, da como resultado el mismo número entero. En el conjunto de los números enteros, el *Cero* es el *Elemento Neutro Aditivo*.
Ejemplo:

$$(-7) \in \mathbb{Z}, 0 \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; (-7) + 0 = 0 + (-7) = (-7)$$

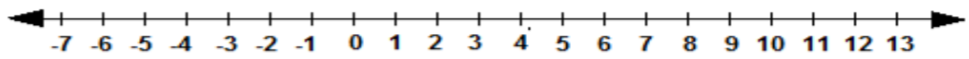
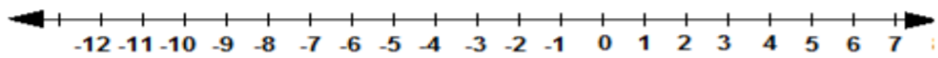
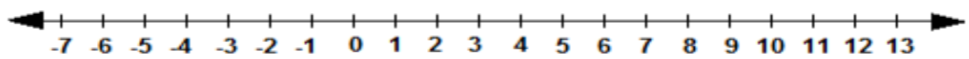
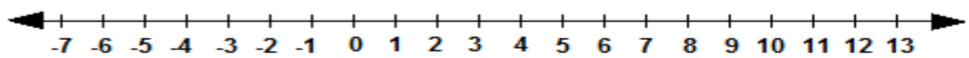
d) Elemento Inverso Aditivo: Cuando se suman dos números con signos opuestos pero igual valor absoluto el resultado es cero y se considera que uno es el inverso aditivo del otro.
Ejemplo:

$$10 \in \mathbb{Z}, (-10) \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; 10 + (-10) = (-10) + 10 = 0$$

e) Conmutatividad: el orden de los sumandos no altera la suma.
Ejemplo:

$$10 \in \mathbb{Z}, (-90) \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad 10 + (-90) = (-90) + 10$$

ACTIVIDAD 3.
Resuelve la suma de enteros utilizando la recta numérica.

${}^{+}7 + {}^{+}4 = \square$	
${}^{-}7 + {}^{-}4 = \square$	
${}^{+}7 + {}^{-}4 = \square$	
${}^{-}7 + {}^{+}4 = \square$	

ACTIVIDAD 4.
Resuelve la suma de enteros utilizando el concepto de valor absoluto.

a) $-5 + 12 =$

b) $-18 + 7 =$

c) $-9 + -9 =$

d) $15 + 9 =$

e) $-12 + -7 =$

f) $8 + -4 =$

g) $-14 + -23 =$

h) $-12 + -17 + 21 =$

i) $34 + 45 + -18 + -32 =$

j) $2 + 3 + 11 + -7 + -21 =$

Observación:
La **<u>sustracción</u>** no es una operación binaria definida. Para realizar la resta de enteros se debe sumar el minuendo con el inverso aditivo del sustraendo.
Ejemplos:

$$8 \in \mathbb{Z}, (-10) \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad 8-(-10) = 8+10\ (-9)$$
$$\in \mathbb{Z}, 5 \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad (-9)-5 = (-9)+(-5)$$
$$7 \in \mathbb{Z}, 10 \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad 7-10 = 7+(-10)$$
$$(-18) \in \mathbb{Z}, (-12) \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad (-18)-(-12) = (-18)+12$$

- La resta de dos enteros resulta un número entero.
- La sustracción de enteros NO es conmutativa.

ACTIVIDAD 5.
Resuelve cada ejercicio en forma ordenada.

a) $|2| + |3| =$

b) $|-2| + |-3| =$
c) $8 - |-3| =$
d) $|3| - 2 =$
e) $|-8| + 2 =$
f) $|-4| - |-5| =$

g) Un ascensor sube desde el primer piso al quinto piso, baja al segundo, sube al octavo, vuelve al primer piso, sube al sexto y vuelve al primer piso. Si cada piso tiene 3 metros de altura, ¿Cuántos metros recorrió el ascensor?

h) En un colegio hay 370 mujeres y 510 hombres. Si al final de año se cambian de colegio 18 hombres y 13 mujeres, y se matricularon 12 hombres y 30 mujeres. ¿Cuántos hombres y mujeres habrán el próximo año en el colegio?

2. **Multiplicación:** Para multiplicar dos números enteros se multiplican sus valores absolutos y el resultado se deja con signo positivo si ambos factores son del mismo signo o se le pone el signo negativo si los factores son de signos contrarios. Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} + & * & + & = & + \\ + & * & - & = & - \\ - & * & + & = & - \\ - & * & - & = & - \end{array}}$$

Ejemplos:

$$+3 * +6 = +18$$
$$+3 * -6 = -18$$
$$-3 * +6 = -18$$
$$-3 * -6 = +18$$

Propiedades de la Multiplicación de Enteros.
Los enteros con la multiplicación definen las propiedades de:

a) Clausura: El producto de dos enteros siempre es un entero.
Ejemplo:
$$(-5) \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; (-5) * 2 = -10 \;\in \mathbb{Z}$$

b) Asociatividad: Si multiplicamos más de dos enteros, el orden de agrupar los factores no altera el producto.
Ejemplo:
$$(-5) \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{Z}, (-3) \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; ((-5) * 2) * (-3) = (-5) * (2 * (-3))$$

c) Elemento Neutro Multiplicativo: para todo número entero, existe un único entero que multiplicado con cualquiera de los números, da como resultado el mismo número entero. En el conjunto de los números enteros, el Un*o* es el *Elemento Neutro Multiplicativo*.
Ejemplo:
$$(-7) \in \mathbb{Z}, 1 \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; (-7) * 1 = 1 * (-7) = (-7)$$

d) Conmutatividad: el orden de los factores no altera el producto.
Ejemplo:
$$10 \in \mathbb{Z}, (-9) \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow \;\; 10 * (-9) = (-9) * 10$$

Observación:
La **división** no es una operación binaria definida. Debemos tener presente que la división se considera posible, en los enteros, solo si el resto es cero. Para dividir dos números enteros, se dividen sus valores absolutos y el resultado se deja con signo positivo si el dividendo y el divisor son de igual signo o se le pone signo negativo si el dividendo y el divisor son de signos opuestos.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ccccc} + & : & + & = & + \\ + & : & - & = & - \\ - & : & + & = & - \\ - & : & - & = & + \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} +18 : +6 = +3 \\ +18 : -6 = -3 \\ -18 : +6 = -3 \\ -18 : -6 = +3 \end{array}}$$

Algoritmo de la división de Enteros.

Si la división de dos enteros tiene resto distinto de cero, se dice que el cociente no pertenece a los
enteros, sin embargo el dividendo se puede escribir como la suma del resto con el producto entre el cociente y el divisor. Es decir:

$$\begin{array}{l} 20 : 8 = 2 \\ \underline{-16} \\ \ \ 4 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \quad = \quad + (\quad * \quad)$$

ACTIVIDAD 6.

Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones de enteros.

a) $5 * -9 =$

b) $-3 * -12 =$

c) $-2 * -3 * -4 * -1 =$

d) $-2 * -3 * -4 * -5 * -1 * -2 * 2 =$

e) $(4 * -3) * -5 =$

f) $(-6 * 9 * -2) * (-2 * 1) =$

g) $(-1 * -1 * -1) * -1 * (-1 * -1) =$

h) $12 : 5 =$

i) $-30 : 9$

j) $16 : -5 =$

k) $-31 : -3$

ACTIVIDAD 7.

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios combinados.

a) $32-19+43-18+35-53=$

b) $16+5-26+3-6-14=$

c) $-12-36-8+15-19-20-36+2-1=$

d) $(15-7)+(6-1)-(9-6)+(19+8)-(3-1)+(4+5)=$

e) $52+[8-3+\{4+2-1\}]=$

f) $50-\{6+[(14-6)-(7-2)+(4-1)]\}=$

g) $12-\{35+[-18-(-63+50)]-[-37+(18+-37)]\}=$

h) $2*7-5*4+3*6-2*11+13=$

i) $3*-5-6*2+2*-1-5*-2*-1=$

j) $(7-5)*4+3*(4-2)+(8-2)*5-2*(11-10)=$

k) $\{15+(9-5)*2\}-\{6*4*3+(5-4)*(3-4)\}=$

l) $8-\{5-3*4+5[8-(6-1)*3+(2-5)*-4]\}=$

m) $-25:-5--12*-3-2*-5-12:-3-15:3*5=$

n) $-8*-8-81:\ -9-25:5--2*3+3*-7=$

o) $-\{24:-6-[5*-2-(42:-6-2*-3+1)-4]\}-2*-5=$

p) $-6*3-2*\{-15:3-(20:5-3*5-1)-(2*3-2*4)\}=$

q) $50-\{(6-1)\,8:4*3+16:(10-2)\}-5=$